Discrete Mathematics 21 (1978) 223–227.

HYPERGRAPHES ARBORES*

Claude FLAMENT

Département de Psychologie, Université de Provence, Aix-en-Provence, France

Reçu 5 août 1976
Revisé 13 juillet 1977

Un hypergraphe arboré est l'hypergraphe d'une famille de sous-arbres d'un arbre. Un hypergraphe est arboré si, et seulement si, il a la propriété de Helly et sa représentation triangulée; cette dernière propriété est ensuite remplacée par une condition sur les cycles de l'hypergraphe.

Soit un hypergraphe $H=(X,\mathscr{E})$, où $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ est l'ensemble des n sommets, et $\mathscr{E}=\{E_1,\ldots,E_m\}$, l'ensemble des m arètes, c'est-à-dire, un ensemble de m parties non vides de $X:E_i\in\mathscr{E}\Rightarrow\emptyset\neq E_i\subset X$. (Remarque: il est commode de ne considérer que des hypergraphes H connexes, c'est-à-dire, ayant une représentation $R(H)$ connexe: cf. *infra*.)

Soit $G=(X,U)$ un graphe construit sur le même ensemble X de sommets.

Nous dirons que H est *rigide* sur G si et seulement si, pour toute arète E_i de H, le sous-graphe $G_{E_i}=(E_i,U_{E_i})$ est connexe. En d'autres termes, si x et x' sont des éléments d'une même arète E_i, il existe dans G une chaine entre x et x' dont tous les sommets figurent dans E_i.

Définition 1. Un hypergraphe est *arboré* si et seulement si il est *rigide sur un arbre*. (De façon rapide, on dit parfois qu'un hypergraphe arboré est l'hypergraphe d'une famille de parties connexes d'un arbre, ou d'une famille de sous-arbres d'un arbre.)

Notre problème est de caractériser les hypergraphes arborés. Ce problème est proche, mais distinct, du problème de caractériser la représentation d'un hypergraphe arboré (Buneman [2]), problème dont un cas particulier est l'étude des graphes représentatifs d'une famille d'intervalles (cf. Berge [1, p. 358]).

Rappelons que la représentation $R(H)$ d'un hypergraphe H est un graphe construit sur l'ensemble $E=\{e_1,\ldots,e_m\}$, chaque sommet e_i de $R(H)$ représentant l'arète E_i de H, en posant que (e_i,e_j) est une arète de $R(H)$ si et seulement si $E_i\cap E_j\neq\emptyset$, $i\neq j$.

On dit qu'un graphe est *triangulé* si et seulement si tout cycle de longeur supérieure à 3 admet une corde (c'est-à-dire, une arète joignant deux sommets non consécutifs du cycle).

* Travail réalisé dans le cardre du contrat DGRST no. 74.7.0353.

Nous appelons *clique* d'une graphe, un ensemble de sommets de ce graphe constituant un sous-graphe complet maximal.

Les résultats de Buneman peuvent alors s'énoncer ainsi:

Propriété 2. *La représentation d'un hypergraphe arboré est triangulée.*

Propriété 3. *Si un graphe triangulé G est construit sur un ensemble* $\{e_1, \ldots, e_m\}$, *et comporte n cliques* $X_1, \ldots, X_n$, *alors il existe un arbre construit sur un ensemble* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *où l'on peut définir m sous-arbres formant l'ensemble* $\mathscr{E} = \{E_1, \ldots, E_m\}$, *tel que:*

$$x_i \in E_j \Leftrightarrow e_j \in X_i,$$

et que, si $H = (X, \mathscr{E})$ *est l'hypergraphe de cette famille de sous-arbres, alors:* $G = R(H)$.

On connait une autre propriété des hypergraphes arborés (Berge [1, p. 383]):

Propriété 4. *Un hypergraphe arboré a la propriété de Helly.*

Rappelons qu'un hypergraphe $H = (X, \mathscr{E})$ a la propriété de Helly si et seulement si, pour toute sous-famille $\mathscr{E}_0$ de $\mathscr{E}$ composée d'arètes ayant deux à deux une intersection non vide, alors on a:

$$\bigcap_{E_i \in \mathscr{E}_0} E_i \neq \emptyset.$$

Les Propriétés 2 et 4 sont nécessaires; nous allons montrer, à l'aide de la Propriété 3, qu'ensemble, elles sont suffisantes pour caractériser un hypergraphe arboré (des exemples montrent que chacune, séparément, est insuffisante).

Théorème 5. *Un hypergraphe est arboré si et seulement si il a la propriété de Helly et sa représentation triangulée.*

Nous devons démontrer la suffisance.

Soit $H = (X, \mathscr{E})$ un hypergraphe ayant la propriété de Helly et tel que $R(H)$ soit triangulée.

Soit une application α de X dans $\mathscr{P}(\mathscr{E})$, définie par: $\alpha(x) = \{E_i\colon\ E_i \in \mathscr{E}, x \in E_i\}$.

Cas particulier. Supposons que H soit tel que pour tout $x \in X$, il n'existe pas $x' \in X$ vérifiant: $\alpha(x') \subset \alpha(x)$.

Dans ces conditions, et puisque H a la propriété de Helly, on voit que pour chaque clique X_i de $R(H)$, existe un élément $x_i \in X$, et un seul, tel que:

$$e_j \in X_i \Leftrightarrow x_i \in E_j;$$

il y a donc une bijection entre l'ensemble X des sommets de H et l'ensemble des cliques de $R(H)$.

$R(H)$ étant triangulé, la Propriété 3 nous dit qu'il existe un arbre construit sur X, et dont chaque $E_j \in \mathscr{E}$ définit un sous-arbre: H est donc arboré.

Cas général. Pour certains $x \in X$, il existe des $x' \in X$ tels que $\alpha(x') \subset \alpha(x)$. Il est possible de trouver une partie X' de X, telle que: (1) pour tout $x' \in X - X'$, il existe un $x \in X'$, vérifiant: $\alpha(x') \subset \alpha(x)$; (2) pour tout $x \in X'$, il n'existe pas $x' \in X'$ tel que: $\alpha(x') \subset \alpha(x)$.

Nous sommes ramenés au cas particulier, si le sous-hypergraphe H' défini par X' a la propriété de Helly et si $R(H')$ est triangulé. Rappelons que les arêtes de H' sont les ensembles *non vides* de la forme $E'_i = E_i \cap X'$, où $E_i \in \mathscr{E}$.

Soit un ensemble $\mathscr{E}'_0 = \{E'_{i_1}, \ldots, E'_{i_r}\}$ d'arêtes de H' se rencontrant deux à deux; alors il en est de même pour $E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}$; il existe donc $x' \in \bigcap_{k=1}^{r} E_{i_k}$. Si $x' \notin X'$, c'est qu'il existe $x \in X'$ tel que $\alpha(x') \subset \alpha(x)$ et donc que $x \in X' \cap \bigcap_{k=1}^{r} E_{i_k} = \bigcap_{k=1}^{r} E'_{i_k}$: H' a la propriété de Helly.

Soient e'_i, e'_j deux sommets de $R(H')$. Si (e_i, e_j) est une arête de $R(H)$, c'est qu'il existe $x \in E_i \cap E_j$, c'est-à-dire qu'on a: $E_i, E_j \in \alpha(x')$; si $x' \notin X'$, c'est qu'il existe $x \in X'$ avec $\alpha(x') \subset \alpha(x)$; donc $x \in E'_i \cap E'_j$ et (e'_i, e'_j) est une arête de $R(H')$: $R(H')$ est un sous-graphe de $R(H)$ (plus précisement, l'application $e'_i \rightarrow e_i$ est un plongement de $R(H')$ sur un sous-graphe de $R(H)$). $R(H')$ est donc triangulé.

Donc, H' est rigide sur un arbre T', construit sur X'. Complétons T' pour en faire un arbre T sur X: si $x' \in X - X'$, choisissons un (et un seul) des $x \in X'$ vérifiant $\alpha(x') \subset \alpha(x)$, et ajoutons à T' le sommet x' et l'arête (x, x').

Il est clair que H est rigide sur T, et est donc arboré.

Dans un hypergraphe $H = (X, \mathscr{E})$, *un cycle de longueur q* est une séquence:

$$(x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots, E_q, x_1)$$

telle que:

$x_1, \ldots, x_q \in X$,	et sont tous différents;
$E_1, \ldots, E_q \in \mathscr{E}$,	et sont tous différents;
$x_k, x_{k+1} \in E_k$	pour $k = 1, 2, \ldots, q$, les indices pris mod q.

Définition 6. Un hypergraphe $H = (X, \mathscr{E})$ est *intriqué* si et seulement si tout cycle de longueur supérieure à 2, utilise trois arètes contenant un même élément $x \in X$ (x pouvant être ou ne pas être, l'un des sommets du cycle)

Propriété 7. *La représentation d'un hypergraphe intriqué est triangulée.*

Soit, dans $R(H)$, un cycle élémentaire $C = (e_1, e_2, \ldots, e_q, e_1)$, avec $q > 3$.

Cas 1: à C correspond dans H un cycle

$$\Gamma = (x_1, E_1, \ldots, E_q, x_1);$$

puisque H est intriqué, on trouve dans Γ trois arètes telles que: $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$.

et donc, dans $R(H)$ on trouve les arètes (e_i, e_j), (e_i, e_k) et (e_j, e_k), dont l'une au moins est une corde de C.

Cas 2: à C ne correspond dans H aucun cycle, mais seulement des séquences utilisant les q arètes E_i représentées par les sommets de C, et des sommets x *non tous différents*; on a par exemple: $(\ldots, E_i, x_i, E_{i+1}, \ldots, x_i, E_k, \ldots)$. On a alors en $R(H)$ les arètes (e_i, e_k) et (e_{i+1}, e_k), dont l'une au moins est une corde de C.

Dans tous les cas, $R(H)$ est triangulée.

Propriété 8. *Un hypergraphe, dont la représentation est triangulée, est intriqué s'il a la propriété de Helly.*

Considérons un cycle de H: $\Gamma = (x_1, E_1, \ldots, E_q, x_1)$ avec $q \geqslant 3$; dans $R(H)$, il lui correspond le cycle $C = (e_1, \ldots, e_q, e_1)$; $R(H)$ étant triangulée, il existe trois sommets de C: e_i, e_j, e_k, formant triangle. Si H a la propriété de Helly, on a alors: $E_i \cap E_j \cap E_k \neq \emptyset$, et H est intriqué.

En conséquence de Théorème 5 et de ces Propriétés 7 et 8, on a:

Théorème 9. *Un hypergraphe est arboré si et seulement si il est intriqué et a la propriété de Helly.*

Définition 10. Un hypergraphe est fortement intriqué si et seulement si tout cycle (de longueur supérieure à 2) comporte une arète contenant trois des sommets du cycle.

Il est clair qu'un hypergraphe fortement intriqué est intriqué. De plus, il est *équilibré* (Berge [1, p. 430]) (puisque cette propriété est définie comme la forte intrication, mais en remplaçant "cycle de longueur supérieure à 2" par "cycle impair").

Théorème 11. *Un hypergraphe fortement intriqué est arboré, ainsi que son dual.*

Etant fortement intriqué, l'hypergraphe est intriqué et équilibré; étant équilibré, il a la propriété de Helly (Berge [1, p. 431]); donc, par le Théorème 9, il est aboré.

Il en est de même pour son dual: en effet, on montre facilement que le dual d'un hypergraphe fortement intriqué est lui-même fortement intriqué (démonstration exactement parallèle à celle de Berge [1, p. 432]) établissant que le dual d'un hypergraphe équilibré est équilibré).

Remarque 12. Une approche totalement différente conduit à une caractérisation des hypergraphes arborés (Flament [3]). Généralisons l'application α définie dans la démonstration du Théorème 9:

$$\alpha(x, x') = \{E_i : E_i \in \mathscr{E}, \{x, x'\} \subset E_i\}.$$

Définissons la *trace* $T(H)$ de l'hypergraphe $H=(X,\mathscr{E})$, par: $T(H)=(X,U)$, avec:

$$(x,x')\in U \Leftrightarrow \alpha(x,x')\neq\emptyset$$

De plus, α induit sur U un préordre:

$$(x,x')\leqslant(y,y') \Leftrightarrow \alpha(x,x')\subset\alpha(y,y').$$

On démontre alors facilement:

Théorème 13. *Un hypergraphe est arboré si et seulement si sa trace, préordonnée par α, admet un arbre maximum.*

(Les conditions d'existance d'un arbre maximum d'un graphe préordonné sont étudiées par Flament [3].)

Bibliographie

[1] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).
[2] P. Buneman, A characterisation of rigid circuit graphs, Discrete Math. 9 (1974) 205–212.
[3] C. Flament, Arètes maximales des cocycles d'un graphe preordonné, Math. Sci. Humaines (1975).